BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 HIMPUNAN TERBUKA DAN TERTUTUP

Definisi 2.1.1 (Bartle, 1992) *Himpunan B sub set R dikatakan terbuka jika untuk setiap $b \in B$ terdapat persekitaran $(b - r, b + r) \subseteq B$.*

Contoh 2.1.2

Himpunan bilangan real R merupakan himpunan terbuka, sebab untuk setiap bilangan x berlaku $(x-1, x+1) \subseteq R$.

Contoh 2.1.3

Interval A = (0, 1] bukan himpunan terbuka.

Definisi 2.1.4 (Bartle, 1992) *Himpunan A dikatakan tertutup (closed) jika himpunan B^C terbuka.*

Contoh 2.1.5

Interval tertutup A = [a,b] merupakan himpunan tertutup.

Contoh 2.1.6

Himpunan bilangan asli N = {1, 2, 3, ...} merupakan himpunan tertutup.

2.2 HIMPUNAN KOMPAK

Definisi 2.2.1 (Bartle, 1992) *Diberikan A himpunan bagian R, koleksi inteval interval terbuka $\{O_n / n \in I\}$ dinamakan liput terbuka himpunan A jika himpunan A termuat di dalam $\cup O_n$.*

Contoh 2.2.2

Himpunan yang berupa interval = [0,1) mempunyai liput terbuka, antara lain :

a. {(-0.2, 0.2), (0, 0.4), (0.2, 0.6), (0.5, 1)}

b. $\{(-\infty, \infty)\}$

c. $\{(-1, 1- \frac{1}{n}) / n = 1,2,3,\ldots\}$

Jadi liput terbuka untuk suatu himpunan dapat berupa koleksi hingga atau tak hingga interval terbuka.

Jika liput terbuka $\{O_n / n \in I\}$ memuat koleksi hingga $\{O_n / n = 1,2,\ldots,p\}$ dan himpunan A masih termuat di dalam koleksi hingga tersebut, maka $\{O_n / n = 1,2,\ldots,p\}$ dinamakan sub liput hingga himpunan A.

Teorema 2.2.3 (Bartle, 1992) *Untuk setiap liput terbuka himpunan A = [0,1] mempunyai sub liput hingga .*

Definisi 2.2.4 (Bartle, 1992) *Himpunan K dinamakan himpunan kompak jika setiap liput terbuka himpunan K mempunyai sub liput hingga.*

Himpunan K dikatakan tidak kompak jika terdapat liput terbuka himpunan K tidak mempunyai sub liput hingga. Mengingat contoh, himpunan A = (0,1) bukan himpunan kompak. Himpunan A = $\{ 1/n \mid n = 1,2,\ldots \}$ juga bukan himpunan kompak. Berdasarkan teorema 2.2.3, setiap interval tertutup merupakan himpunan kompak.

Contoh 2.2.5

Himpunan A = {0, 1, 1/2, 1/3, ... } merupakan himpunan kompak.

Teorema – teorema berikut ini menjelaskan karakteristik himpunan kompak di dalam R.

Teorema 2.2.6 (Bartle, 1992) *Jika K himpunan kompak maka K terbatas dan tertutup.*

Teorema 2.2.7 (Bartle, 1992) *Jika K himpunan kompak dan M* $\subseteq$ *K tertutup maka M juga kompak.*

Teorema 2.2.8 (Bartle, 1992) *Jika M himpunan tertutup dan terbatas maka M kompak.*

Teorema 2.2.9 (Bartle, 1992) *Di dalam R, K himpunan kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas.*

2.3 HIMPUNAN TERBATAS

Diberikan himpunan tak kosong $A \subseteq R$, bilangan x disebut batas atas himpunan A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $x \geq a$. Himpunan A dikatakan terbatas ke atas jika himpunan tersebut mempunyai batas atas. Bilangan x disebut batas bawah himpunan A jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $x \leq a$. Himpunan A dikatakan terbatas ke bawah jika himpunan tersebut mempunyai batas bawah.

Bilangan x bukan batas atas A jika terrdapat $a \in A$ dengan $a < x$. Secara sama, bilangan x bukan batas bawah jika terdapat $a \in A$ dengan $a > x$. Himpunan A dikatakan terbatas jika mempunyai batas atas dan batas bawah. Dengan kata lain, himpunan A dikatakan terbatas jika terdapat bilangan $m > 0$, sedemikian hingga untuk setiap $a \in A$ berlaku $-m \leq a \leq m$.

Definisi 2.3.1 (Bartle, 1992) *Dikatakan $f: A \to R$ dikatakan terbatas pada A jika terdapat kosntanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk semua $x \in A$.*

Contoh 2.3.2

1. Himpunan A = [a,b] merupakan himpunan terbatas. Sebab a dan b berturut – turut merupakan batas bawah dan batas atas A = [a,b].
2. Lima dan nol berturut – turut adalah batas atas dan batas bawah atas himpunan $A = \{5,4,3,2,1,0\}$.

2.4 FUNGSI KONTINU

Diberikan f : (a,b) $\rightarrow$ R dan c $\in$ (a,b). Fungsi f dikatakan kontinu di titik c untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap x $\in$ (a,b) dan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Definisi 2.4.1 (Bartle, 1992) *Diberikan f : (a,b) $\rightarrow$ R. Jika (c,d) $\subset$ (a,b), fungsi f dikatakan kontinu pada (c,d) jika f kontinu di setiap titik pada (c,d).*

Definisi 2.4.2 (Purcel, 1995) *Diberikan f : A $\rightarrow$ R dan c $\in$ A. Fungsi f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan $Lim_{x\rightarrow c} f(x) = f(c)$.*

Dari definisi di atas dapat disimpulkan syarat suatu fungsi kontinu, yaitu

a. $Lim_{x\rightarrow c}$ f(x) ada

b. f(c) ada

c. $Lim_{x\rightarrow c} f(x) = f(c)$

Teorema 2.4.3 (Purcel, 1995) *Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional maka $Lim_{x\rightarrow c} f(x) = f(c)$.*

Teorema 2.4.4 (Purcel, 1995) *Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan Riil c.*

2.5 NILAI EKSTRIM

Definisi 2.5.1 (Purcel, 1995) *Diberikan $D \subseteq R^n$ dan $f : D \rightarrow R$. Jika $(a,b) \in D$, nilai $f(a,b)$ adalah nilai minimum lokal dari fungsi f bila $f(a,b) \leq f(x,y)$ untuk semua domain (x,y) di dalam cakram dengan pusat (a,b).*

Definisi 2.5.2(Purcel, 1995) *Diberikan $D \subseteq R^n$ dan $f : D \rightarrow R$. Jika $(a,b) \in D$, nilai $f(a,b)$ adalah nilai maksimum lokal dari fungsi f bila $f(a,b) \geq f(x,y)$ untuk semua domain (x,y) di dalam cakram dengan pusat (a,b).*

Definisi 2.5.3(Purcel, 1995) *Diberikan $D \subseteq R^n$ dan $f : D \rightarrow R$. Jika $(a,b) \in D$, fungsi $f(x,y)$ memiliki titik pelana di (a,b) bila di dalam setiap titik di dalam cakram dengan pusat (a,b) terdapat domain (x,y) di mana $f(x,y) > f(a,b)$ dan domain (x,y) di mana $f(x,y) < f(a,b)$.*

2.5.1 FUNGSI SATU VARIABEL

Terdapat fungsi satu variabel $F = f(x)$. Titik ekstrim fungsi dicari melalui $f'(x) = 0$. Dari sini akan diperoleh satu atau lebih titik ekstrim atau tidak ada. Misalkan salah satu titik ekstrimnya berada pada $x = a$, sehingga $f'(a) = 0$. Jenis ekstrimnya dapat dicari dengan memakai kajian deret Taylor.

Deret Taylor dari f(x) di sekitar x = a adalah

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a) + \ldots$$

jika h = x – a maka

$$f(x) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a) + \ldots$$

$$= f(x) - f(a) = \frac{1}{2}h^2 f''(a) + \ldots$$

Parameter h menunjukkan nilai perubahan *f(x)* di sekitar x = a (h $\neq 0$). Kita tidak perlu mencari nilai eksak dari h, yang diperlukan adalah tanda positif atau negatifnya. Tanda positif atau negatif h hanya ditentukan oleh suku pertama dari deret tersebut.

Maka dapat disimpulkan bahwa h>0 dicapai bila $f''(a) > 0$, artinya *f(x)* mencapai minimum di x = a (di sekitar x = a terjadi f(x) > f(a)). Sedangkan h< 0 dicapai bila $f''(a) < 0$, artinya x mencapai maksimum di x = a (di sekitar x = a terjadi $f(x) < f(a)$. Bila $f''(a) = 0$, maka tanda h = 0 menjadi tak tentu, bisa positif atau negatif. Jenis titik kritis ini dinamakan titik ekstrim tak tentu maksimum atau minimum, dalam hal ini disebut juga titik belok.

Dari sini dapat disimpulkan bahwa, "Nilai ekstrim dari fungsi satu variabel diperoleh dengan melalui $f'(x) = 0$ dan jenis ekstrimnya dapat dideteksi dari tanda nilai $f''(x)$, bila positif maka titik tersebut sebagai titik ekstrim minimum, bila negatif maka sebagai titik ekstrim maksimum dan bila nol maka sebagai titik belok."

2.5.2 FUNGSI DUA VARIABEL

Terdapat fungsi dua variabel F = *f(x,y)*. Titik – titik kritis diperoleh dari :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 0 \text{ dan } \frac{\partial F}{\partial y} = F_y = 0$$

Misalkan salah satu titik ekstrimnya berada pada x = a dan y = b, sehingga $F_x(a,b) = 0$ dan $F_y(a,b) = 0$. Deret Taylor di sekitar titik x = a dan x = b adalah

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(a,b)$$

Bila $\eta = F(x,y) - F(a,b)$ dan $h = x - a$, $k = y - b$, maka

$$= \frac{1}{2}(h^2 F_{xx} + 2hkF_{xy} + k^2 F_{yy}) + \ldots, \text{ untuk } h \neq 0,\ k \neq 0$$

Di sini h dan k adalah variabel bebas, bilangan real yang cukup kecil di sekitar titik ekstrim (a,b). Sehingga tanda positif / negatif dari nilai η adalah dipengaruhi langsung oleh nilai h dan k. Pengaruh langsung variabel bebas h dan k ini dapat dikendalikan oleh komponen turunan fungsi bila persamaan tersebut diubah menjadi bentuk kuadrat lengkap sebagai berikut :

$$= \frac{1}{2F_{xx}}(h^2 F_{xx} + 2hkF_{xx}F_{xy} + k^2F^2_{xy} + k^2 F_{xx}F_{yy} - k^2F^2_{xy}) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2F_{xx}}\left((hF_{xx} + kF_{xy})^2 + k^2(F_{xx}F_{yy} - F^2_{xy})\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2F_{xx}}\left((hF_{xx} + kF_{xy})^2 + k^2\,\eta\right) + \ldots$$

ini dinamakan metode penyelesaiaan x ($F_{xx} \neq 0$), di mana $\Delta = F_{xx}F_{yy} - F^2_{xy}$.

Sekarang pengaruh variabel h dan k dalam mempengaruhi tanda positif / negatif dapat dikendalikan oleh komponen turunan fungsi, yaitu Δ dan F_{xx}.

Sehingga dengan menggunakan metode penyelesaian dalam x ($F_{xx} \neq 0$) pada fungsi dua variabel dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Jenis ekstrim fungsi dua variabel dapat dideteksi dari nilai Δ dan F_{xx} .
2. Bila $\Delta>0$ maka tanda dari hanya bergantung pada F_{xx} , sehingga titik tersebut merupakan titik ekstrim minimum bila $F_{xx} >0$ ($\Delta>0$) dan merupakan titik ekstrim maksimum bila $F_{xx} < 0$ ($\Delta<0$).
3. Bila $\Delta < 0$ maka tanda dari menjadi tidak tentu, bisa positif atau negatif, bergantung pada nilai h dan k, sehingga titik tersebut dinamakan sebagai titik ekstrim tak tentu atau titik pelana.
4. Bila $\Delta = 0$ maka jenis kritis pada titik tersebut masih belum dapat disimpulkan, karena untuk nilai h dan k tertentu dapat menghasilkan nilai $\Delta= 0$, artinya tanda positif / negatifnya dari belum dapat dipastikan.
5. Bila dibuat tabel akan diperoleh

F_{xx}	F_{yy}	Δ	Jenis Titik Ekstrim
+ / –	+ / –	+	Minimum / Maksimum
		–	Pelana
		0	Belum tahu
+	–	–	Pelana
–	+	–	Pelana

Bila F_{xx} dan F_{yy} memiliki tanda sejenis maka akan menghasilkan titik ekstrim maksimum atau minimum, tetapi ingat harus diuji lagi bahwa nilai $\Delta>0$. Bila F_{xx} dan F_{yy} memiliki tanda tidak sejenis maka titik ekstrim yang dihasilkan adalah titik pelana.

2.6 MASALAH OPTIMASI

Suatu masalah optimasi dalam $\Re^n$ adalah suatu masalah di mana kita harus menentukan suatu nilai dari suatu fungsi yang diberikan $f: \Re^n \rightarrow \Re$ untuk memaksimalkan atau meminimalkan atas sebuah himpunan $\delta \subset \Re^n$. Selanjutnya fungsi f disebut fungsi objektif dan himpunan δ disebut himpunan pembatas (kendala).

Secara umum masalah optimasi ini akan kita sajikan dalam bentuk penotasian

$$Max\ \{f(x)\ |x \in \delta\}$$

dan

$$Min\ \{f(x)\ |x \in \delta\}$$

Solusi untuk masalah $Max\ \{f(x)\ |\ x \in \delta\}$ adalah suatu titik x dalam sedemikian sehingga

$$f(x) \geq f(y),\ \forall y \in \delta.$$

Dalam hal ini f mencapai sebuah nilai maksimum atas δ pada x dan x disebut titik maksimalisasi f atas δ. Sedangkan solusi dari masalah Min $\{f(x)\ |\ x \in \delta\}$ adalah suatu titik z dalam δ sedemikian sehingga $f(z) \leq f(y),\ \forall y \in \delta$.

Dalam hal ini f mencapai nilai minimum atas δ pada z dan z disebut titik minimalisasi f atas δ.

Himpunan nilai – nilai f atas δ dinotasikan dengan $f(\delta)$ dan kita definisikan dengan

$$f(\delta) = \{\, w \in \Re \mid \exists x \in \delta \ni f(x) = w \,\}$$

Contoh 2.6.1

Misal $\delta = \Re_+$ dan $f(x) = x$ untuk $x \in \delta$, maka $f(\delta) = \Re_+$ dan sup $f(\delta) = +\infty$. Jadi masalah $Max\ \{f(x) \mid x \in \delta\}$ tidak mempunyai solusi.

Contoh 2.6.2

Misal $\delta = [\ 0,\ 1\ ]$ dan misal $f(x) = x\ (1 - x)$ untuk $x \in \delta$. Maka masalah dari maksimalisasi f atas δ mempunyai tepat satu solusi, yaitu $x = \frac{1}{2}$.

Contoh 2.6.3

Misal $\delta = [\ -1,\ 1\ ]$ dan $f(x) = x^2$ untuk $x \in \delta$. Masalah maksimalisasi f atas δ mempunyai dua solusi $x = -1$ dan $x = 1$.

Selanjutnya, himpunan dari semua titik yang menentukan nilai f maksimum dan minimum atas δ dinotasikan dengan $arg\ Max\ \{f(x) \mid x \in \delta\}$ dan $argMin\ \{f(x) \mid x \in \delta\}$, dimana

$$arg\ Max\ \{f(x) \mid x \in \delta\} = \{\, x \in \delta \mid f(x) \geq f(y),\ \forall y \in \delta \,\}$$

sedangkan

$$\arg Min \{f(x) \mid x \in \delta\} = \{ x \in \delta \mid f(x) \leq f(y),\ \forall y \in \delta \}$$

Dari persamaan di atas, misal $-f$ menotasikan fungsi yang mempunyai nilai pada x yaitu $-f(x)$, maka

Teorema 2.6.4 (Sundaram, 1996) *Titik x adalah suatu titik maksimum dari f atas δ jika dan hanya jika x adalah suatu titik minimum dari –f atas δ.*

Teorema 2.6.5 (Sundaram, 1996) *Titik z adalah suatu titik minimum dari f atas δ jika dan hanya jika z adalah suatu titik maksimum dari – f atas δ.*

Misal $\varphi : \Re \rightarrow \Re$ adalah sebuah fungsi naik, sedemikian hingga x > y maka $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Teorema 2.6.6 (Sundaram, 1996) *Titik x adalah suatu titik maksimum dari f atas δ jika dan hanya jika x juga merupakan titik maksimum dari fungsi komposisi $\varphi \circ f$ atas δ.*

Teorema 2.6.7 (Sundaram, 1996) *Titik z adalah suatu titik minimum dari f atas δ jika dan hanya jika z juga merupakan titik minimum dari $\varphi \circ f$ atas δ.*

2.7 OPTIMASI DALAM BENTUK PARAMETER

Himpunan titik fisibilitas dari suatu fungsi objektif dalam bentuk parameter tergantung pada nilai dari suatu parameter θ dalam beberapa himpunan nilai – nilai parameter fisibilitas Θ. Dimana θ adalah himpunan dari semua parameter yang terlibat, dengan θ menotasikan sebagai parameter khusus dalam Θ. Dalam hal ini jika $\theta \in \Theta$, maka fungsi objektif atas himpunan titik – titik fisibilitas dari masalah optimasi disajikan dalam notasi $f(*, \theta)$ dan $\delta(\theta)$, jadi jika masalah optimasi adalah masalah suatu maksimasi, maka akan ditulis

$$Max\,\{f(x, \theta)\ /x \in \delta(\theta)\}$$

Sementara masalah minimasi akan dinotasikan dalam bentuk

$$Min\,\{f(x, \theta)\ /x \in \delta(\theta)\}$$

Dimana himpunan titik – titik maksimasi dari $f(*, \theta)$ atas $\delta(\theta)$ dinotasikan dengan

$$arg\,Max\,\{f(x, \theta)\ /x \in \delta(\theta)\}$$

Dengan demikian akan kita gunakan notasi $\delta^*(\theta)$ sehingga himpunan titik – titik maksimalisasi dari

$$\delta^*(\theta) = arg\,Max\,\{f(x, \theta)\ /x \in \delta(\theta)\}$$

$$= \{x \in \delta(\theta)\ /f(x, \theta) \geq f(z, \theta),\ \forall z \in \delta(\theta)\}$$

Dengan cara yang sama akan kita gunakan notasi $\delta_*(\theta)$ sebagai himpunan titik – titik minimalisasi dari $f(*, \theta)$ atas $\delta(\theta)$.

Selanjutnya dinotasikan $f^*(\theta)$ dan $f_*(\theta)$ berturut – turut sebagai nilai supremum dan infimum dari fungsi objektif yang diberikan dalam bentuk parameter θ. Yaitu jika $f(\delta(\theta)) = \{y \in \Re \mid y = f(x, \theta), \forall x \in \delta(\theta)\}$ menyatakan himpunan dari nilai – nilai yang dapat dicapai $f(\bullet, \theta)$ atas $\delta(\theta)$, maka

$$f^*(\theta) = sup f(\delta(\theta))$$

dan

$$f_*(\theta) = inf\, f(\delta(\theta)).$$

Kita sebut f^* nilai fungsi dari masalah maksimasi atau $Max\{f(x, \theta) \mid x \in \delta(\theta)\}$ dan f_* sebagai nilai fungsi dari masalah $Min\{f(x, \theta) \mid x \in \delta(\theta)\}$. Jika $\delta^*(\theta)$ adalah himpunan tidak kosong untuk beberapa θ, maka $f(\delta(\theta)) = f(x^*, \theta) = f(x^', \theta)$, $\forall x^*$ dan $x^'$ ada dalam $\delta^*(\theta)$. Jadi dalam hal ini kita nyatakan bahwa $f^*(\theta) = f(x^*, \theta)$, $\forall x^* \in \delta^*(\theta)$. Dengan cara yang sama dapat ditentukan bahwa $f_*(\theta)$ atas $\delta_*(\theta)$ yang tak kosong.